The Society of Astronomers of Serbia

Друштво астронома Србије

Друштво астронома Србије
Волгина 7, 11060 Београд
http://www.das.org.rs

ЗАДАЦИ ЗА ТЕОРИЈСКИ ДЕО ЗА РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ АСТРОНОМИЈЕ 1-2. јун 2024. године

1 Задаци

(100п)

1. Астроном аматер из Београда треба да отпутује на Малту (Ла Валета $\lambda = 14°30'51''$ исток, $\varphi = 35°53'57''$). Хоће и онде да посматра звезде, чим се заврши астрономски сумрак. Његов авион полеће из Београда у 16 часова (средњоевропско време +1 час). Према његовој процени лет и све формалности ће му одузети око пет часова. Да ли ће моћи да оствари своју намеру, да почне да посматра на самом крају астрономског сумрака? Тога дана је временско изједначење $\eta = 12,5^s$, деклинација Сунца $\delta_\odot = 10°13'20''$. На Малти је званично време исто као у Београду. **(20п)**

2. Када се налази у зениту, пун Месец на Земљиној површини даје осветљеност $E_0 = 0,32\mathrm{lx}$. Узимајући у обзир да атмосфера апсорбује $k = 23\%$ упадног зрачења, одредити сјај Месечевог диска B. Даљина до Месеца износи $r = 384\,400\mathrm{km}$, а полупречник сателита је $R = 1\,738\mathrm{km}$. **(20п)**

3. Извести формулу за укупну привидну величину система од n звезда, ако су привидне величине компонената $m_1, m_2, \dots m_n$. Како гласи формула у специјалном случају када су све компоненте исте привидне величине $m = m_1 = m_2 = \dots = m_n$? **(20п)**

4. Одредити однос луминозности компонената у еклипсно двојном систему ако су познати њихови полупречници $R_A = 1,39 \cdot 10^9\mathrm{m}$ и $R_B = 0,90 \cdot 10^9\mathrm{m}$ и привидне величине $m_{\max} = 5,545$, $m_{p\min} = 5,990$, и $m_{s\min} = 5,790$. **(20п)**

5. Пензиас и Вилсон открили су 1965. године позадинско реликтно зрачење. То зрачење емитовано је у тренутку када је васиона постала прозрачна. Његова расподела одговара Планковој расподели на температури $3K$.

а) Како се мења енергија фотона фреквенције ν уколико зрачење показује црвени помак z?

б) Како космички црвени помак одговара смањењу енергије фотона и с којом се релативном брзином креће извор позадинског зрачења, ако је зрачење емитовано при температури од $4000K$?

ц) Колика је брзина Земље према центру сферне љуске која представља извор зрачења, ако је у смеру Земљиног кретања температура која одговара израченој већа за $3,5mK$?

Однос фреквенције на којој је зрачење максимално и температуре је $5,86 \cdot 10^{10}$Hz/K.
(20п)

РЕШЕЊА

1. Астроном аматер из Београда треба да отпутује на Малту (Ла Валета $\lambda = 14°30'51''$ исток, $\varphi = 35°53'57''$). Хоће и онде да посматра звезде, чим се заврши астрономски сумрак. Његов авион полеће из Београда у 16 часова (средњоевропско време +1 час). Према његовој процени лет и све формалности ће му одузети око пет часова. Да ли ће моћи да оствари своју намеру, да почне да посматра на самом крају астрономског сумрака? Тога дана је временско изједначење $\eta = 12,5^s$, деклинација Сунца $\delta_\odot = 10°13'20''$. На Малти је званично време исто као у Београду. **(20п)**

   Одговор:

   Треба одредити када се Сунце налази 18° испод хоризонта (то је тренутак краја астрономског сумрака) датог дана на Малти. У ту сврху ће послужити Гаусова група образаца (сферна тригонометрија, дато у таблицама па се формуле не бодују). Прилагођена за прелаз са хоризонтских координата на месне екваторске она гласи

$$
\begin{aligned}
&\sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\phi\cos t,\\
&\cos A\sin h = \cos\delta\sin t,\\
&\cos A\cos h = -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   Сада рачунамо тренутак краја астрономског сумрака, а то је када је $h_\odot = -18°$, а азимут A није од значаја. Овде користимо прву једначину коју решавамо по $\cos t$. Добија се: $\cos t = -0,518164$. **(5п)**

   Косинус је негативан у другом ($6^h < t < 12^h$) и трећем квадранту ($12^h < t < 18^h$). Пошто се ради о крају астрономског сумрака, мора бити западна небеска хемисфера, значи други квадрант следи да је $t = 8^h4^m50,2^s$. **(5п)**

   С обзиром на то да је небеско тело Сунце ово је право време. Применом поправки, тј. одузимањем временског изједначења и додавањем 12^h за месно средње време се добија $t_l = 20^h4^m37,7^s$ **(5п)**.

   Прелаз на зонско време (средњоевропско) по формули

$$
\begin{aligned}
\Delta\lambda &= 0°29'9''\\
\frac{\Delta\lambda}{360} &= \frac{\Delta t}{24}\\
\Delta t &= 1^m56,6^s
\end{aligned}
\tag{2}
$$

   даје $t_z = 20^h6^m34,3^s$ и, пошто се примењује летње време, додаје се још један час, дакле тражени тренутак ће бити тренутак краја астрономског сумрака у Ла Валети је $t_p = 21^h6^m34,3^s$, а толико показује и часовник у Београду. То значи $5^h6^m34,3^s$ после полетања авиона, што се може заокруглити на 5 часова. Дакле наш астроном аматер је сасвим правилно проценио време. **(5п)**

2. Када се налази у зениту, пун Месец на Земљиној површини даје осветљеност $E_0 = 0,32\text{lx}$. Узимајући у обзир да атмосфера апсорбује $k = 23\%$ упадног зрачења, одредити сјај Месечевог диска B. Даљина до Месеца износи $r = 384\,400\text{km}$, а полупречник сателита је $R = 1\,738\text{km}$.

Одговор:

Осветљеност на површини Земље (са урачунатим ефектом апсорпције) означићемо са E_0, а осветљеност ван атмосфере (без апсорпције) са E. Веза ових величина је

$$E_0 = (1-k)E \tag{3}$$

где је k коефицијент који говори колики је део од упадног зрачења апсорбован у атмосфери. **(5п)**

За случај коначног извора (извора чију површину можемо да видимо, али ипак је довољно далеко да можемо сматрати како су зраци који од њега долазе паралелни, а тачке на његовој површини једнако удаљене од посматрача) можемо да применимо формулу

$$E = B \cdot \omega \tag{4}$$

која повезује осветљеност коју извор даје E са сјајем извора B и просторним углом под којим се извор види ω. **(5п)**

Добијамо

$$B = \frac{E_o}{(1-k)\omega} \tag{5}$$

Просторни угао под којим се види Месец једнак је

$$\omega = \frac{4\pi R^2}{r^2}\,. \tag{6}$$

Дакле сјај извора добијамо из једначине:

$$B = \frac{E_0 r^2}{4\pi R^2(1-k)}\,. \tag{7}$$

(5п)

Заменом бројних вредности добијамо коначан резултат

$$B = 1618\frac{\text{cd}}{\text{m}^2}\,. \tag{8}$$

(5п)

Напомена: У задатку је коришћена вредност $k = 23\%$ која се односи на правац ка зениту. За све друге правце апсорпција је већа, а осветљеност се смањује. Такође, треба водити рачуна о углу под којим се површина види са извора. Када се извор налази у зениту, претпостављамо да је површина пријемника нормална на правац упадних зрака.

3. Извести формулу за укупну привидну величину система од n звезда, ако су привидне величине компонената $m_1, m_2, \dots m_n$. Како гласи формула у специјалном случају када су све компоненте исте привидне величине $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_n$?

Одговор:

Укупна осветљеност је дата као:

$$E_{uk} = E_1 + E_2 \cdots + E_n \tag{9}$$

(2п)

Сетимо се сада Погсоновог закона:

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1 + 2,5 \log \frac{E_1}{E_2} \\ E_2 &= E_1 \cdot 10^{-0,4 \cdot (m_2 - m_1)} \end{aligned} \tag{10}$$

(5п)

Уколико сада представимо сваку осветљеност (од E_2 до E_n), преко осветљености E_1, добија се:

$$\begin{aligned} E_{uk} &= E_1 (1 + 10^{-0,4 \cdot (m_2 - m_1)} + \cdots + 10^{-0,4 (m_n - m_1)}) \\ m_1 - m_{uk} &= 2,5 \log \frac{E_{uk}}{E_1} = 2,5 \log \sum_{i=1}^{n} 10^{-0,4 (m_i - m_1)} \\ m_{uk} &= m_1 - 2,5 \log \sum_{i=1}^{n} 10^{-0,4 (m_i - m_1)} \end{aligned} \tag{11}$$

(8п)

Специјални случај имамо када су све звезде у скупу исте привидне величине m_1:

$$m_{uk} = m_1 - 2,5 \log n \tag{12}$$

(5п)

4. Одредити однос луминозности компонената у еклипсно двојном систему ако су познати њихови полупречници $R_A = 1,39 \cdot 10^9$m и $R_B = 0,90 \cdot 10^9$m и привидне величине $m_{\max} = 5,545$, $m_{\text{pmin}} = 5,990$, и $m_{\text{smin}} = 5,790$.

Одговор:

Уводимо следеће ознаке за осветљеност E (осветљеност која потиче од обе звезде), E_H (осветљеност од хладније звезде), E_T (осветљеност од топлије звезде, E_{pmin} (осветљеност у дубљем, примарном минимуму), E_{smin} (осветљеност у плићем, секундарном минимуму). Тада важи да је $E = E_H + E_T$. Затим уведимо ознаке за полупречнике R_M (полупречник мање звезде), R_V (полупречник веће звезде), R_T (полупречник топлије звезде), R_H (полупречник хладније звезде).

Током примарног минимума помрачена је топлија звезда, али ми не знамо да ли је сјајнија (тј. топлија) мања или већа звезда. Зато можемо да напишемо:

$$\begin{aligned} E_{pmin} &= E - \frac{R_M^2}{R_T^2} \cdot E_T \\ E_{pmin} &= E_H + (1 - \frac{R_M^2}{R_T^2}) \cdot E_T \end{aligned} \tag{13}$$

Последња једначина важи у оба случаја:

1) ако је топлија звезда мања: $\frac{R_M^2}{R_T^2} = 1$, $E_{pmin} = E - E_T$,

2) ако је топлија звезда већа: $\frac{R_M^2}{R_T^2}$ је једнако проценту површине веће звезде која се види, а $E_{pmin} = E - (\frac{R_M^2}{R_V^2})E_V$.

За време секундарног минимума помрачена је хладнија звезда. Поново имамо сличну једначину која важи у оба случаја:

$$\begin{aligned} E_{smin} &= E - \frac{R_M^2}{R_H^2} E_H \\ E_{smin} &= E_T + (1 - \frac{R_M^2}{R_H^2}) E_H \end{aligned} \tag{14}$$

(5п)

Уводимо сад смену $b = \frac{E_T}{E_H}$ и нађимо чему су једнаки односи укупне осветљености према осветљеностима у минимумима:

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_{pmin}} &= \frac{E_H + E_T}{E_{pmin}} \\ \frac{E}{E_{pmin}} &= \frac{E_H(1+b)}{E_H(1 + b(1 - \frac{R_M^2}{R_T^2}))} = \frac{1+b}{1 + b(1 - \frac{R_M^2}{R_T^2})} (*) \\ \frac{E}{E_{smin}} &= \frac{E_H + E_T}{E_{smin}} \\ \frac{E}{E_{smin}} &= \frac{E_H(1+b)}{E_H(1 + b - \frac{R_M^2}{R_H^2})} = \frac{1+b}{1 + b - \frac{R_M^2}{R_H^2}} (**) \end{aligned} \tag{15}$$

Сада можемо да применимо Погсонов закон:

$$\begin{aligned} m_{pmin} - m = 2,5log\frac{E}{E_{pmin}} = 5,990 - 5,545 = 0,445 \\ m_{smin} - m = 2,5log\frac{E}{E_{smin}} = 5,790 - 5,545 = 0,245 \end{aligned} \tag{16}$$

Одакле налазимо:

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_{pmin}} = 10^{0,4(m_{pmin}-m)} = 1,5066 \\ \frac{E}{E_{smin}} = 10^{0,4(m_{smin}-m)} = 1,2531 \end{aligned} \tag{17}$$

(5п)

Ако погледамо једначине (*) и (**) видимо да су нам леве стране познате а на десним имамо три непозната односа b, $\frac{R_M^2}{R_T^2}$ и $\frac{R_M^2}{R_H^2}$. Недостаје нам једна једначина за решавање овог система па смо принуђени да уведемо претпоставку да је мања звезда сјајнија (топлија), што значи $R_M = R_T$.

Имајући то у виду решавамо систем. Из прве једначине добијамо:

$$\frac{1+b}{1+b(1-1)} = 1+b = 1,5066 \Rightarrow b = 0,5066 \tag{18}$$

из друге једначине имамо:

$$\frac{1+b}{1+b-\frac{R_T^2}{R_H^2}} = 1,2531 \Rightarrow \frac{R_T}{R_H} = 0,55 \tag{19}$$

Када ово упоредимо са подацима који су нам дати у задатку налазимо:

$$\frac{R_M}{R_V} = 0,65 \neq \frac{R_T}{R_H} \tag{20}$$

Дакле, наша претпоставка била је погрешна, односно већа звезда је сјајнија па из тога следи да је $R_V = R_T$, а $R_M = R_H$. Решавање једначине (**) сада даје:

$$\frac{1+b}{1+b-1} = 1,2531 \Rightarrow b = 0,4 \tag{21}$$

Тражени однос луминозности једнак је односу одговарајућих осветљености јер се звезде налазе на једнаком растојању од посматрача:

$$\frac{L_V}{L_M} = \frac{L_T}{L_H} = \frac{E_T}{E_H} = b = 0,4 \tag{22}$$

(10п)

5. Пензиас и Вилсон открили су 1965. године позадинско реликтно зрачење. То зрачење емитовано је у тренутку када је васиона постала прозрачна. Његова расподела одговара Планковој расподели на температури $3K$.

а) Како се мења енергија фотона фреквенције ν уколико зрачење показује црвени помак z?

б) Како космички црвени помак одговара смањењу енергије фотона и с којом се релативном брзином креће извор позадинског зрачења, ако је зрачење емитовано при температури од $4000K$?

ц) Колика је брзина Земље према центру сферне љуске која представља извор зрачења, ако је у смеру Земљиног кретања температура која одговара израченој већа за $3,5mK$?

Однос фреквенције на којој је зрачење максимално и температуре је $5,86 \cdot 10^{10}$Hz/K.

Одговор:

а) Црвени помак је последица Доплеровог ефекта и изражава се као:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \tag{23}$$

где је λ_0 лабораторијска, а λ измерена вредност таласне дужине. Тражи се да нађемо промену енергије, па нам је згодније да пређемо на једначине по фреквенцији, $v = \frac{c}{\lambda}$:

$$z = \frac{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu}} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} \tag{24}$$

Како је енергија фотона $E = h \cdot \nu$, губитак енергије биће једнак:

$$-\Delta E = -h\Delta\nu = Ez \tag{25}$$

(5п)

б) Према Виновом закону, на температури T максимум зрачења биће на фреквенцији ν једнакој:

$$\nu(Hz) = 5,86 \cdot 10^{10} T(K) \tag{26}$$

У тренутку емисије зрачења $T_0 = 4000K$, максимум је био на $\nu_0 = 2,34 \cdot 10^{14} Hz$, док за вредност температуре од $T = 3K$, добијамо $\nu = 1,76 \cdot 10^{11} Hz$. Према томе одговарајући црвени помак биће једнак:

$$z = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = 1330 \tag{27}$$

Брзину удаљавања сада лако налазимо као:

$$V = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} c = 0,99c \tag{28}$$

(10п)

ц) Због кретања Земље ка извору позадинског зрачења, из смера кретања ка Земљи долази зрачење које одговара за ΔT већој температури. Услед тога мења се фреквенција максимума спектра $\Delta\nu = 5,86 \cdot 10^{10} \cdot \Delta T$, следи да је $\Delta\nu = 2,05 \cdot 10^8 Hz$. То је веома мала релативна промена фреквенције (већ израчунато $\nu = 1,76 \cdot 10^{11} Hz$) тако да за израчунавање брзине можемо да користимо нерелативистичку формулу:

$$V = \frac{\Delta\nu}{\nu} c = 350 \frac{km}{s} \tag{29}$$

(5п)