

ЗАДАЦИ ЗА ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ АСТРОНОМИЈЕ 9. фебруар 2025. године

Задаци

1. Тренутак је право подне, звездано време је $s = 21^h 20^m 14^s$. Ако се место налази на северној Земљиној хемисфери, на којој страни света је Сунце? Колика је ректасцензија Сунца? Одредити приближно месец у години? **(25п)**
2. Опозиција за спољашње планете се догађа онда када се Земља нађе између неке од њих и Сунца. За Марс се догађа с времена на време тзв. велика опозиција када је он удаљен 56,7 милиона километара од Земље. Марс обилази око Сунца 1,88 пута дуже него Земља. Колика је највеће растојање ове планете од Земље? Сматрати да се орбите Земље и Марса налазе у истој равни и да је Земља увек на истом растојању од Сунца једнаком 149,5 милиона километара. **(25п)**
3. *Мали Принц* живи на астероиду *Б-612*, који је сферног облика. Његов пречник је $d = 1000 \text{ m}$, а густина астероида је $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$. Коликом максималном брзином би Мали Принц смео да хода, а да не напусти гравитационо поље свог астероида? **(25п)**
4. У далекој галаксији, планета *Татуин* кружи око бинарног система звезда. Маса прве звезде је $M_1 = 1,2M_\odot$, $M_2 = 0,6M_\odot$, а планета Татуин се налази на растојању од $r = 1,5 \text{ АЈ}$ од центра масе бинарног система.
 - а) Одредити период обиласка планете око бинарног система. **(9п)**
 - б) Империја планира да постави станицу "Звезда смрти" у стабилну геосинхрону орбиту око Татуина. На којој висини изнад површине би требало да се налази станица, ако је пречник планете 10 000 km, а њена просечна густина једнака густини Земље и ротациони период једнак ротационом периоду Земље? **(9п)**
 - ц) Колика је минимална брзина потребна да звездани брод Миленијумски соко побегне из гравитационог поља Татуина? **(7п)**

Максималан број поена је 100. Време за рад и слање задатака на електронску адресу: drustvo.astronoma.srbije@gmail.com је 120 минута.

Одговори примљени после 12:00 часова неће се узимати у обзир.

РЕШЕЊА

1. Када је право подне, Сунце је у меридијану, на северној хемисфери на јужној страни неба. Према томе, његов часовни угао је тада једнак нули. Звездано време је часовни угао тачке пролећне равнодневице (γ тачке). С обзиром на чињеницу да се часовни угао мери у ретроградном смеру, а угао назван ректасцензија у супротном (директном) смеру од γ тачке, следи да је ректасцензија Сунца тада једнака звезданом времену, тј.

$$\alpha_{\odot} = 21^h 20^m 14^s$$

Овај закључак се вреднује **15 поена**.

Ректасцензија Сунца стално расте, тренутку краткодневице или зимског солстицијума на северној хемисфери одговара

$$\alpha_{\odot} = 18^h 0^m 0^s$$

а тренутку пролећне равнодневице на истој хемисфери

$$\alpha_{\odot} = 24^h 0^m 0^s$$

Сматрајући да је

$$\alpha_{\odot} \approx 20^h 0^m 0^s$$

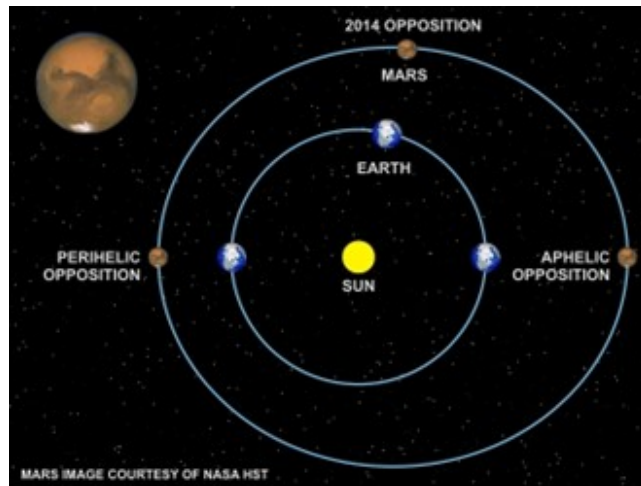
месец дана после краткодневице и

$$\alpha_{\odot} \approx 22^h 0^m 0^s$$

два месеца после краткодневице, долази се до закључка да је посредни фебруар.

Коначни резултат се вреднује **10 поена**.

2. Разлог постојања велике опозиције је незанемарљива ексцентричност Марсове елиптичне орбите (први Кеплеров закон). Дакле, велика опозиција се догађа онда када се Земља нађе на главној линији Марсове орбите, коју називамо апсидна линија, и Марс се нађе у перихелу, тј. најближи је Сунцу.



Перихелско растојање Марса r_p дато је као:

$$r_p = a + \Delta_{go}$$

где је a растојање Земље од Сунца, а Δ_{go} растојање Марса од Земље (геоцентрично) у тренутку велике опозиције.

Према условима задатка је $r_p = 206,2$ (милиона km).

Положај у коме је Марс најдаљи назива се афел и тада је најдаљи и од Земље, под условом да је Сунце између двеју планета. Збир перихелског и афелског растојања је два пута већи од дужине велике полуосе елипсе.

$$\frac{r_p + r_a}{2} = a$$

За одређивање дужине велике полуосе користи се трећи Кеплеров закон који гласи

$$\frac{r_m^3}{P^2} = const$$

Ознака r_m односи се на средње растојање планете једнако дужини велике полуосе елипсе; са P је означен период обиласка. Ако се за константу узме вредност 1, онда се добија да је $\frac{r_m}{a} = 1,523$ и следи $r_m = 227,7$ (милиона km), $r_m - r_p = 21,5$ (милиона km). Одатле добијамо да је $r_a = 249,2$ (милиона km).

Највеће растојање Марса од Земље добијамо $d_{max} = 249,2 + 149,5 = 398,7$ (милиона км).

(25 поена)

3. Корак 1: Израчунавање масе астероида (10 поена)

Прво рачунамо запремину астероида коришћењем формуле за запремину сфере:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

где је $R = \frac{d}{2} = 500$ m.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(500)^3 \approx 523,6 \times 10^6 \text{ m}^3$$

Масу добијамо као:

$$M = \rho V = 2500 \text{ kg/m}^3 \times 523,6 \times 10^6 \text{ m}^3 \approx 1,309 \times 10^{12} \text{ kg}$$

Корак 2: Израчунавање брзине бекства (15 поена)

Брзина бекства је дата формулом:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

где је $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Убацивањем вредности:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 6,674 \times 10^{-11} \times 1,309 \times 10^{12}}{500}} \approx 0,59 \text{ m/s}$$

4. Задатак а - Кеплеров закон и период орбите (9 поена)

Кеплеров трећи закон гласи:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G(M_1 + M_2)}$$

Где је:

$$G = 6,674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

$$M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} kg$$

$$r = 1,5AJ = 1,5 \times 1,496 \times 10^{11} m$$

Укупна маса бинарног система:

$$M_{\text{total}} = M_1 + M_2 = 1,8M_{\odot} = 1,8 \times 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Израчунавамо квадрат периода:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (1,5 \times 1,496 \times 10^{11})^3}{(6,674 \times 10^{-11})(1,8 \times 1,989 \times 10^{30})}$$

Након решавања добијамо:

$$T \approx 1,37 \text{ године}$$

Дакле, планета Татуин обиђе око бинарног система за приближно 1,37 година.

Задатак б - Геосинхрона орбита за "Звезду смрти" (9 поена)

Геосинхрона орбита значи да период сателита око Татуина мора бити једнак сопственом ротационом периоду планете. Период ротације Татуина једнак је Земљином, тј. $T_p = 24 \text{ h}$.

Користимо 3. Кеплеров закон:

$$r^3 = \frac{GM_p T_p^2}{4\pi^2}$$

Параметри:

- Пречник Татуина: $10\,000 \text{ km} \Rightarrow R = 5\,000 \text{ km} = 5 \times 10^6 \text{ m}$,

- Густина: $\rho = 5514 \text{ kg/m}^3$,

- Маса Татуина:

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 5514 \cdot \frac{4}{3}\pi (5 \times 10^6)^3 \approx 2,88 \times 10^{24} \text{ kg.}$$

Орбитални полупречник r :

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}, \quad T = 86400 \text{ s.}$$

Уврштавањем вредности:

$$r \approx 33\,100 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad \text{висина} = r - R = 33\,100 - 5\,000 = 28\,100 \text{ km.}$$

Задатак ц - Брзина бекства са Татуина (7 поена)

Брзина бекства је дата изразом:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}$$

Користећи израчунату масу M_p и полупречник $R_p = 5000 \text{ km}$, добијамо:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \cdot 2,88 \times 10^{24}}{5 \times 10^6}} \approx 8,77 \text{ km/s.}$$